NYE UNDERSØGELSER OVER GEOMETRIENS GRUNDLAG.

AF

J. HJELMSLEV.

VED Kongressen i Stockholm for 2 Aar siden havde jeg Lejlighed til at fremsætte nogle af de vigtigste Resultater af de nyere Undersøgelser over Geometriens Principper. Jeg skal nu i Dag have den Ære at supplere denne Meddelelse med nogle Resultater, som jeg er naaet til i Mellemtiden.

Som bekendt kan man gennemføre den systematiske Begrundelse af Projektivgeometrien uden Anvendelse af Parallelaksiomet og uden Anvendelse af Kontinuitetsprincippet. Med Hensyn til Parallelaksiomet stiller Sagen sig saaledes, at man ubetinget kan undvære det: der træder intet nyt Postulat i Stedet. Med Hensyn til Kontinuitetsprincippet er Forholdet imidlertid anderledes: Man maa i Stedet for Kontinuitetspostulatet indføre Kongruensforudsætninger. At dette alligevel betyder en væsentlig Reduktion, fremgaar deraf, at det nye Postulatsystem omfatter Anvendelser, Geometrier, der ikke tilfredsstiller Kontinuitetspostulatet, de saakaldte Ikke-Arkimediske Geometrier, saaledes at det nye System faar en væsentlig større Rækkevidde. Ved denne Fremstilling af Projektivgeometrien har man altsaa 2 Grupper af Postulater: de rent projektive Forudsætninger for det 3-dimensionale Rum, og Kongruensforudsætninger.

Med Hensyn til de sidste har *F. Schur* i 1902 indskrænket dem til Anvendelse i én enkelt Plan, hvorimod de projektive Postulater stadig omfattede hele Rummet. Det System, man derved var naaet til, kan betegnes som det *Pasch-Schur'ske* System, idet nemlig *Pasch* har Æren af at have givet Midlerne til at undgaa Parallelaksiomet,

medens *Schur* har vist, at man kan undgaa Kontinuitetspostulatet ved Indførelse af Kongruensforudsætninger.

I 1907 lykkedes det mig at vise, at man kan undvære enhver Forudsætning om, at Rummet er tredimensionalt, saa at man herefter ved Siden af den *Pasch-Schur'ske* Begrundelse af Projektivgeometrien ogsaa har en Begrundelse i Planen alene.

Nu mener *Schur* imidlertid at have lagt Mærke til en væsentlig Forskel i de 2 Systemer med Hensyn til Kongruensforudsætningerne, og han fremhæver denne Forskel temmelig stærkt i sin nye Bog: Grundlagen der Geometrie, hvor begge Systemer er udførligt behandlede. *Schur* har nemlig der formuleret sine Kongruensforudsætninger saaledes, at ét af dem, Postulatet om Liniestykkets Omvending ($AB = BA$) ikke spiller nogen Rolle ved Beviset for Projektivgeometriens Fundamentalsætning, medens dette Postulat paa den anden Side synes at være en nødvendig Forudsætning i det plane System.

Sammenhængen hermed er nu i Virkeligheden følgende: Det er rigtigt, at det omtalte Postulat om Liniestykkets Omvending finder direkte Anvendelse i den plane Fremstilling, men ikke i den rumlige. Men Brugen af Postulatet er speciel, idet det kun benyttes i saadanne specielle Tilfælde, hvor Liniestykkets Endepunkter paa Forhaand vides at være afledede af hinanden ved en Række Spejlinger. Med andre Ord: Postulatet behøver kun at tages i en stærkt begrænset Form: *Naar de to Sider i en Trekant hver for sig kan vendes om, gælder det samme om den tredje Side.*

Men i denne specielle Form viser Postulatet sig ikke længere uafhængigt af det *Pasch-Schur'ske* System, idet det kan bevises ved Hjælp af de øvrige Forudsætninger.

Jeg skal nu imidlertid meddele en meget væsentlig yderligere Reduktion af det plane System (og dermed af det almindelige Grundlag). Systemet, som det hidtil forelaa, omfattede dels projektive Postulater (den rette Linies Bestemmelse ved 2 Punkter, Ordning af Punkter paa en ret Linie, Planens Deling i adskilte Dele ved rette Linier) og dels Kongruensforudsætninger. De Reduktioner, som jeg har opnaaet, er nu følgende:

1) Postulaterne om Ordningen af Punkter paa en ret Linie og om Planens Deling ved rette Linier kan udelades.

2) Fordringen om, at et vilkaarligt Punkt (Linie) ved Flytning kan føres over i ethvert andet Punkt (Linie) kan ogsaa stryges.

3) Omvendingspostulaterne (for Liniestykke og Vinkel) kan reduceres betydeligt.

Det System, man beholder tilbage, ser saaledes ud:

1) 2 forskellige Punkter bestemmer én og kun én ret Linie.

2) Der gives foruden Identiteten én og kun én Flytning som lader en ret Linies Punkter, hvert for sig, blive liggende. Denne Flytning kaldes en Spejling med Hensyn til Linien. 2 forskellige Linier, som har et Punkt fælles, kan ikke svare til samme Spejling.

3) Foruden Identiteten gives der én og kun én Flytning af en ret Linie i Linien selv, der lader et vilkaarligt af Liniens Punkter ligge fast.

4) Naar der eksisterer en Flytning af en ret Linie AB i Linien selv, saaledes at A føres over i B, da eksisterer der en Flytning, som ombytter Punkterne A og B.

5) Naar 2 kongruente Punktrækker beliggende paa forskellige Linier har et Punkt fælles, som svarer til sig selv, da eksisterer der en Spejling, som fører Rækkerne over i hinanden.

Paa Grundlag af disse Postulater alene lykkes det nu at bevise Fundamentalsætningen i den projektive Geometri.

Beviserne eller Hjælpemidlerne kan jeg ikke her komme ind paa. Jeg skal kun endnu give et Par orienterende Oplysninger med Hensyn til det Fremskridt, som de nævnte Reduktioner betegner. Det kan kort karakteriseres ved 2 væsentlige Resultater:

For det første *har man frigjort sig ikke blot fra det almindelige Kontinuitetsprincip*, *men tillige fra enhver Fordring om irrationale Operationers Mulighed.* I den gamle Kongruenslære laa implicit Fordringen om visse Kvadratrødders Eksistens. I den nye, saaledes som jeg forelægger den i Dag, er vi ude over denne Fordring. Hvad jeg mener hermed vil træde tydeligere frem, naar jeg nævner et simpelt Eksempel: Den Geometri, som vi faar ved i den Cartesiske Plan at tage alle Punkter med rationale Koordinater, medens alle andre Punkter udelades, tilfredsstiller det nye System af Postulater, men ikke det ældre, idet enhver Linie ikke kan flyttes over i enhver anden Linie.

Det andet Fremskridt vi har naaet, er det, at Postulaterne om Ordningen af den rette Linies Punkter og om Planens Deling (de grafiske Postulater) ogsaa viser sig at være overflødige. Tilbage staar af de rent projektive Fordringer kun den om den rette Linies Bestemmelse ved 2 Punkter. Kan vi ogsaa frigøre os fra den?

Nej! Det ligger i selve Projektivgeometriens Natur, at den nævnte Grundsætning maa blive staaende. Og om nogen logisk Afhængighed mellem den nævnte Forudsætning og de øvrige 4 Postulater kan der ikke være Tale; til Bevis herfor behøver man kun at betragte den radial-projektive Geometri, som er behandlet udførligt i *Study's*: Geometrie der Dynamen. I denne Geometri viser det sig nemlig, at den nævnte Forudsætning om Liniens Bestemmelse ved 2 Punkter ikke gælder, medens de øvrige 4 Postulater alle er tilfredsstillede.

Derimod kan man formulere et nyt Problem: *det metriske Problem,* som bestaar i at undersøge alle de Geometrier, hvori de metriske Postulater gælder, men hvor Postulatet om den rette Linies éntydige Bestemmelse ikke nødvendigvis gælder. Med Formuleringen af dette Problem træder Undersøgelserne over Geometriens Grundlag ind i et helt nyt Spor, idet vi her staar over for et Undersøgelsesomraade med vidtgaaende Anvendelser.